CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES IESSA 2020

Ce corrigé est proposé par Antoine Dubus (promotion IESSA 2020).

Question 1

Réponse : **A**

Justification : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad sinc(\pi t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad sinc(\pi t) = 0 \iff \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 0 \iff \sin(\pi t) = 0 \iff \pi t \equiv 0[\pi]$

Or $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \pi t \equiv 0[\pi] \iff \pi t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff t \in \mathbb{Z}$

La seule courbe qui s'annule en tous les entiers relatifs est la courbe A.

Question 2

Réponse : **D**

Justification : La transformée de Fourier d'une fonction g notée $\hat{\mathrm{g}}$ est définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mathrm{g}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Soit $f \in \mathbb{R}, \quad S_1(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos(2\pi t)e^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t$

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc(\pi t)\left(e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}\right)e^{-i2\pi ft}\,\mathrm{d}t$$

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc(\pi t)\left(e^{-i2\pi(f-1)t} + e^{-i2\pi(f+1)t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$S_1(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)e^{-i2\pi(f-1)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)e^{-i2\pi(f+1)t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Donc $\quad S_1(f) = \dfrac{1}{2}(S(f-1) + S(f+1))$

Question 3

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : La transformée de Fourier de la fonction *sinc* est rappelée dans le sujet. D'après l'expression de la transformée de Fourier de la fonction s_1, on remarque que le spectre de s_1 comporte deux portes de largeur 1 centrées en 1 et en -1 avec pour amplitude $\frac{1}{2}$.

Question 4

RÉPONSE : **C**

JUSTIFICATION : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$

Donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(2\pi t) = \dfrac{\cos(4\pi t)+1}{2}$

Question 5

RÉPONSE : **A**

JUSTIFICATION : On calcule $S_2(f),\ f \in \mathbb{R}$ de la même façon qu'on a calculé $S_1(f),\ f \in \mathbb{R}$ pour répondre à la question 2. On utilise également la linéarisation de $\cos^2(2\pi t)$ trouvée à la question 4.

Soit $\quad f \in \mathbb{R}, \quad S_2(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos^2(2\pi t)e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$

$$S_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\frac{\cos(4\pi t)+1}{2}e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$S_2(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos(4\pi t)e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}sinc(\pi t)\left(e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}\right)e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\left(e^{-i2\pi(f-2)t} + e^{-i2\pi(f+2)t}\right)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)e^{-i2\pi(f-2)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)e^{-i2\pi(f+2)t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

Donc $\quad S_2(f) = \dfrac{1}{4}\left(S(f-2) + S(f+2)\right) + \dfrac{1}{2}S(f)$

Question 6

Réponse : **A**

Justification : On reconnaît la courbe de la fonction sin d'amplitude A.

La fonction a donc la forme suivante : $\forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right], \quad s(t) = A\sin(kt), \quad k \in \mathbb{R}$

La seconde fois que la fonction s s'annule, elle s'annule en $\frac{T}{2}$.

Or la fonction sin s'annule pour la seconde fois en π.

On a donc $\pi = kT/2, \quad k \in \mathbb{R} \iff k = 2\pi/T$

Donc $\forall t \in \left[0; \frac{T}{2}\right], \quad s(t) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$

Question 7

Réponse : **C**

Justification : Si f est périodique de période T, sa valeur moyenne notée $< f >$

est définie par $< f >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $< s >= \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} s(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T s(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Or $\forall t \in \left[\frac{T}{2}; T\right], \quad s(t) = 0$

Donc $\int_{T/2}^T s(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Donc $< s >= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} s(t)\,\mathrm{d}t$

D'après le résultat de la fonction précédente,

$$< s >= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2}$$

$$< s >= \frac{A}{T}\frac{T}{2\pi}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - (-\cos(0))\right) = \frac{A}{2\pi}(\cos(0) - \cos(\pi)) = \frac{A}{\pi}$$

Question 8

Réponse : **B**

Justification : On sait que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Donc $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = a_0 + \dfrac{A}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\left(2nt\dfrac{2\pi}{T}\right)}{4n^2-1}$

Or, d'après la définition de la série de Fourier de la fonction s,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos\left(nt\frac{2\pi}{T}\right) + b_n \sin\left(nt\frac{2\pi}{T}\right)\right)$$

Par identification, $\quad a_{2n} = -\dfrac{2A}{\pi(4n^2-1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

Question 9

Réponse : **C + D**

Justification : De la même façon que la question précédente, on procède par identification.

On obtient $b_1 = \dfrac{A}{2}$ et $b_3 = 0$, ce qui invalide les réponses A et B.

Question 10

Réponse : **A**

Justification : On remarque que la somme recherchée peut être obtenue grâce à la série de Fourier de la fonction s donnée dans la question 7 qu'on évalue en 0.

En effet, $\quad s(0) = a_0 - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$

Or, d'après le résultat de la question 6, $s(0) = 0$

Donc $\quad 0 = a_0 - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} \iff \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{a_0\pi}{2A} = \dfrac{A\pi}{\pi 2A} = \dfrac{1}{2}$

Question 11

Réponse : **D**

Justification : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = -te^{-(-t)^2} = -te^{-t^2} = -f(t)$

Question 12

Réponse : **D**

Justification : Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = t \quad$ et $\quad v(t) = e^{-t^2}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = e^{-t^2} - 2t^2e^{-t^2} = (1-2t^2)e^{-t^2}$

Question 13

Réponse : **A + D**

Justification : Afin de déterminer les variations de la fonction f, on étudie le signe de sa dérivée.

Le signe de la fonction f' ne dépend que du terme $(1-2t^2)$ car $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \geq 0$

Donc $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \geq 0 \iff 1 - 2t^2 \geq 0 \iff t^2 \leq \dfrac{1}{2} \iff t \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

On a aussi $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \leq 0 \iff 1 - 2t^2 \leq 0 \iff t^2 \geq \dfrac{1}{2}$

Donc $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \leq 0 \iff t \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$

f est donc croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Question 14

Réponse : **B**

Justification : On sait que $\quad \lim_{t\to+\infty} e^{-t^2} = 0$

Donc par croissances comparées, $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} te^{-t^2} = 0$

Question 15

Réponse : **D**

Justification : La fonction f est intégrable sur $[0; +\infty[$

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Question 16

Réponse : **B**

JUSTIFICATION : On sait que $\forall z \in \mathbb{R}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = te^{-t^2} = t\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-t^2)^n}{n!} = t\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!}$

Question 17

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION :Le déterminant d'une matrice 3×3 est calculée grâce à la formule

suivante : soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\quad \det A = aei + dhc + bfg - ceg - bdi - fha$

D'après la formule précédente, $\det A = -8 \neq 0$ donc A est inversible.

Question 18

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 4 \times 2 - 8 \times 2 & -4 \times 2 \\ 0 & 2 \times 2 & 0 \\ -4 \times 2 & 2 \times 4 - 8 \times 2 + 4 \times 8 & 2 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix}$$

Question 19

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : $A^3 + 2A^2 - 12A = AA^2 + 2A^2 - 12A$

$$AA^2+2A^2-12A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AA^2 + 2A^2 - 12A = \begin{pmatrix} -16 & 64 & 40 \\ 0 & 8 & 0 \\ 40 & -144 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 & -16 \\ 0 & 8 & 0 \\ -16 & 48 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -48 & -24 \\ 0 & -24 & 0 \\ -24 & 96 & 48 \end{pmatrix}$$

$$AA^2 + 2A^2 - 12A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -8I$$

Question 20

Réponse : **D**

Justification : En multipliant l'équation trouvée à la question 19 par A^{-1} on obtient :

$$A^2 + 2A - 12I = -8A^{-1} \iff A^{-1} = \frac{1}{8}(12I - A^2 - 2A)$$

$$12I - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -16 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(12I - A^2 - 2A) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$