CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE OBLIGATOIRE DE MATHÉMATIQUES IESSA 2020

Ce corrigé est proposé par Antoine Dubus (promotion IESSA 2020).

Les corrigés des années suivantes (avec des commentaires des rapports de jury et le résumé des méthodes et connaissances rencontrées) sont inclus dans le document **disponible sur Amazon** intitulé :

« **MATHS concours IESSA : Correction des épreuves depuis 2020** »

Question 1

RÉPONSE : **A**

JUSTIFICATION : $\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad sinc(\pi t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Donc $\quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad sinc(\pi t) = 0 \iff \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 0 \iff \sin(\pi t) = 0 \iff \pi t \equiv 0[\pi]$

Or $\quad \forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \pi t \equiv 0[\pi] \iff \pi t = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff t \in \mathbb{Z}$

La seule courbe qui s'annule en tous les entiers relatifs est la courbe A.

Question 2

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : La transformée de Fourier d'une fonction g notée $\hat{\mathrm{g}}$ est définie par :

$$\forall f \in \mathbb{R}, \quad \hat{\mathrm{g}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

Soit $\quad f \in \mathbb{R}, \quad S_1(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos(2\pi t) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc(\pi t)\left(e^{i2\pi t} + e^{-i2\pi t}\right) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$S_1(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc(\pi t)\left(e^{-i2\pi(f-1)t} + e^{-i2\pi(f+1)t}\right)\,\mathrm{d}t$$

$$S_1(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t) e^{-i2\pi(f-1)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t) e^{-i2\pi(f+1)t}\,\mathrm{d}t\right)$$

Donc $\quad S_1(f) = \dfrac{1}{2}(S(f-1) + S(f+1))$

Question 3

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : La transformée de Fourier de *sinc* est rappelée dans le sujet.

D'après l'expression de la transformée de Fourier de la fonction s_1, le spectre de s_1 comporte deux portes de largeur 1 centrées en 1 et en -1 avec pour amplitude $\dfrac{1}{2}$.

Question 4

Réponse : **C**

Justification : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$

Donc $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(x) = \dfrac{\cos(2x)+1}{2} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos^2(2\pi t) = \dfrac{\cos(4\pi t)+1}{2}$

Question 5

Réponse : **A**

Justification : On calcule $S_2(f), \ f \in \mathbb{R}$ de la même façon qu'on a calculé $S_1(f), \ f \in \mathbb{R}$ pour répondre à la question 2. On utilise également la linéarisation de $\cos^2(2\pi t)$ trouvée à la question 4.

Soit $\quad f \in \mathbb{R}, \quad S_2(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos^2(2\pi t) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$

$$S_2(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\frac{\cos(4\pi t)+1}{2} e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t$$

$$S_2(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\cos(4\pi t) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} sinc(\pi t)\left(e^{i4\pi t} + e^{-i4\pi t}\right) e^{-i2\pi f t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t)\left(e^{-i2\pi(f-2)t} + e^{-i2\pi(f+2)t}\right)\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

$$S_2(f) = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t) e^{-i2\pi(f-2)t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} sinc(\pi t) e^{-i2\pi(f+2)t}\,\mathrm{d}t\right) + \frac{1}{2}S(f)$$

Donc $\quad S_2(f) = \dfrac{1}{4}\left(S(f-2) + S(f+2)\right) + \dfrac{1}{2}S(f)$

Question 6

RÉPONSE : **A**

JUSTIFICATION : On reconnaît la courbe de la fonction sin d'amplitude A.

La fonction a donc la forme suivante : $\forall t \in \left[0; \dfrac{T}{2}\right], \quad s(t) = A\sin(kt), \quad k \in \mathbb{R}$

La seconde fois que la fonction s s'annule, elle s'annule en $\dfrac{T}{2}$.

Or la fonction sin s'annule pour la seconde fois en π.

On a donc $\pi = kT/2, \quad k \in \mathbb{R} \iff k = 2\pi/T$

Donc $\forall t \in \left[0; \dfrac{T}{2}\right], \quad s(t) = A\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$

Question 7

RÉPONSE : **C**

JUSTIFICATION : Si f est périodique de période T, sa valeur moyenne notée $< f >$ est définie par $< f >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$

Donc $< s >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} s(t)\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T s(t)\,\mathrm{d}t\right)$

Or $\forall t \in \left[\dfrac{T}{2}; T\right], \quad s(t) = 0$

Donc $\displaystyle\int_{T/2}^T s(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Donc $< s >= \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T/2} s(t)\,\mathrm{d}t$

D'après le résultat de la fonction précédente,

$$< s >= \frac{1}{T}\int_0^{T/2} A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{A}{T}\left[-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^{T/2}$$

$$< s >= \frac{A}{T}\frac{T}{2\pi}\left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) - (-\cos(0))\right) = \frac{A}{2\pi}(\cos(0) - \cos(\pi)) = \frac{A}{\pi}$$

Question 8

Réponse : **B**

Justification : On sait que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = a_0 + \dfrac{A}{2}\sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right) - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos\left(2nt\dfrac{2\pi}{T}\right)}{4n^2-1}$

Or, d'après la définition de la série de Fourier de la fonction s,

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad s(t) = \dfrac{1}{2}a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\left(nt\dfrac{2\pi}{T}\right) + b_n\sin\left(nt\dfrac{2\pi}{T}\right)\right)$

Par identification, $\quad a_{2n} = -\dfrac{2A}{\pi(4n^2-1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

Question 9

Réponse : **C + D**

Justification : De la même façon que la question précédente, on procède par identification.

On obtient $b_1 = \dfrac{A}{2}$ et $b_3 = 0$, ce qui invalide les réponses A et B.

Question 10

Réponse : **A**

Justification : On remarque que la somme recherchée peut être obtenue grâce à la série de Fourier de la fonction s donnée dans la question 7 qu'on évalue en 0.

En effet, $\quad s(0) = a_0 - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$

Or, d'après le résultat de la question 6, $s(0) = 0$

Donc $\quad 0 = a_0 - \dfrac{2A}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} \iff \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{a_0\pi}{2A} = \dfrac{A\pi}{\pi 2A} = \dfrac{1}{2}$

Question 11

Réponse : **D**

Justification : $\quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad f(-t) = -te^{-(-t)^2} = -te^{-t^2} = -f(t)$

Question 12

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : Soient u et v deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = e^{-t^2}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car u et v sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = u'(t)v(t) + v'(t)u(t) = e^{-t^2} - 2t^2e^{-t^2} = (1-2t^2)e^{-t^2}$

Question 13

RÉPONSE : **A + D**

JUSTIFICATION : Afin de déterminer les variations de la fonction f, on étudie le signe de sa dérivée.

Le signe de la fonction f' ne dépend que du terme $(1-2t^2)$ car $\forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \geq 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \geq 0 \iff 1 - 2t^2 \geq 0 \iff t^2 \leq \dfrac{1}{2} \iff t \in \left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

On a aussi $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \leq 0 \iff 1 - 2t^2 \leq 0 \iff t^2 \geq \dfrac{1}{2}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) \leq 0 \iff t \in \left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$

f est donc croissante sur $\left[0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

Question 14

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION : On sait que $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t^2} = 0$

Donc par croissances comparées, $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t^2} = 0$

Question 15

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : La fonction f est intégrable sur $[0; +\infty[$

$$I = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -2te^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\left[e^{-t^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Question 16

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION : On sait que $\forall z \in \mathbb{R}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = te^{-t^2} = t\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = t\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{n!}$

Question 17

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION : Le déterminant d'une matrice 3×3 est calculé grâce à la formule

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \qquad \det A = aei + dhc + bfg - ceg - bdi - fha$

D'après la formule précédente, $\det A = -8 \neq 0$ donc A est inversible.

Question 18

RÉPONSE : **B**

JUSTIFICATION :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 4 \times 2 - 8 \times 2 & -4 \times 2 \\ 0 & 2 \times 2 & 0 \\ -4 \times 2 & 2 \times 4 - 8 \times 2 + 4 \times 8 & 2 \times 2 + 4 \times 4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix}$$

Question 19

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : $A^3 + 2A^2 - 12A = AA^2 + 2A^2 - 12A$

$$AA^2+2A^2-12A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} - 12 \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$AA^2+2A^2-12A = \begin{pmatrix} -16 & 64 & 40 \\ 0 & 8 & 0 \\ 40 & -144 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 & -16 \\ 0 & 8 & 0 \\ -16 & 48 & 40 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -48 & -24 \\ 0 & -24 & 0 \\ -24 & 96 & 48 \end{pmatrix}$$

$$AA^2 + 2A^2 - 12A = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} = -8I$$

Question 20

RÉPONSE : **D**

JUSTIFICATION : En multipliant l'équation trouvée à la question 19 par A^{-1} on obtient

$$A^2 + 2A - 12I = -8A^{-1} \iff A^{-1} = \frac{1}{8}(12I - A^2 - 2A)$$

$$12I - A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 0 \\ -8 & 24 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -16 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(12I - A^2 - 2A) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$